Profesor : José Cutipa

PITAGORAS ACADEMIA

# HABILIDAD LÓGICA MATEMÁTICA

## GRUPO PITÁGORAS

# EN ESTE MES DE DICIEMBRE

PITAGORAS
ACADEMIA

Feliz navidad

# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

## ¿Qué son?

Son equivalencias lógicas que nos permiten reducir esquemas moleculares complejos y expresarlos en forma más sencilla.

- Equivalencias Lógicas
- Simplificación
- Circuitos

~ Condicional

$$[p \rightarrow \sim(q \rightarrow p)] \rightarrow \sim q$$

$$[p \rightarrow (q \wedge \sim p)] \rightarrow \sim q$$

Condicional

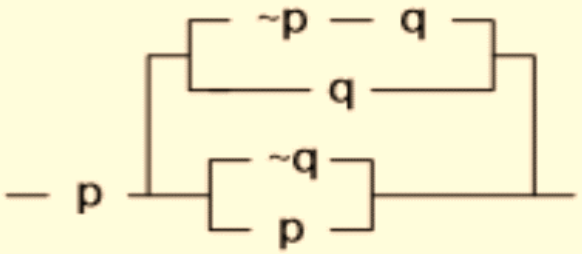
$$[\sim p \vee (q \wedge \sim p)] \rightarrow \sim q$$

Absorción

$$\sim p \rightarrow \sim q$$

Condicional

$$\mathbf{p} \vee \sim \mathbf{q}$$



# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Dos o más esquemas lógicos serán equivalentes si al realizar sus respectivas tablas de verdad poseen la misma matriz principal

Para un mejor entendimiento veamos el siguiente ejemplo con una ley muy conocida

Ley de la condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$
$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

Las demostraciones de dichas leyes se hacen construyendo la tabla de verdad en cada caso

| p | q | p | → | q | ~p | ∨ | q | ~q | → | ~p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | **V** | V | F | **V** | V | F | **V** | F |
| V | F | V | **F** | F | F | **F** | F | V | **F** | F |
| F | V | F | **V** | V | V | **V** | V | F | **V** | V |
| F | F | F | **V** | F | V | **V** | F | V | **V** | V |

Se comprueba las equivalencias lógicas, ya que poseen la misma matriz principal.

# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

## 1. Ley Involutiva o doble negación

$\sim(\sim p) \equiv p$

## 2. Ley de la idempotencia

$p \wedge p \equiv p$ $\quad$ $p \vee p \equiv p$

## 3. Ley conmutativa

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

$p \Delta q \equiv q \Delta p$

## 4. Ley asociativa

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

## 5. Ley distributiva

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

## 6. Ley de D´Morgan

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

## 7. Ley de absorción

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

## 8. Ley de la condicional

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

## 9. Ley de la bicondicional

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

## 10. Ley del complemento

$p \wedge \sim p \equiv F$ $\quad$ $p \vee \sim p \equiv V$

## 11. Ley de la identidad

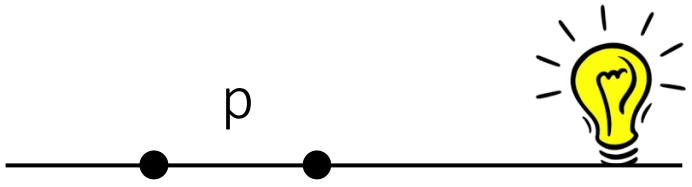
$p \wedge V \equiv p$ $\quad$ $p \wedge F \equiv F$

$p \vee F \equiv p$ $\quad$ $p \vee V \equiv V$

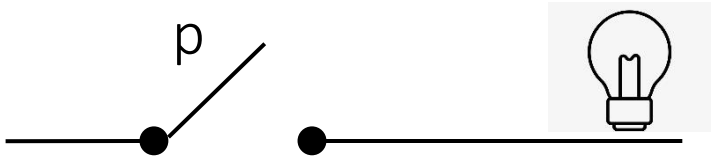
# LEYES LÓGICAS: CIRCUITOS LÓGICOS

## Si el circuito esta asociado a una lampara (foco)

El circuito funciona si la proposición es verdadera, el interruptor está cerrado y pasa corriente.



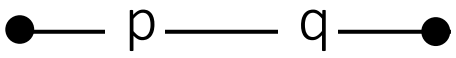

El circuito no funciona si la proposición es falsa, el interruptor está abierto y no pasa corriente




## Según la disposición de los interruptores en un circuito, se tiene dos tipos de circuitos: serie y paralelo.

### CIRCUITO EN SERIE

Es aquel que está constituido por interruptores dispuestos uno detrás de otro.

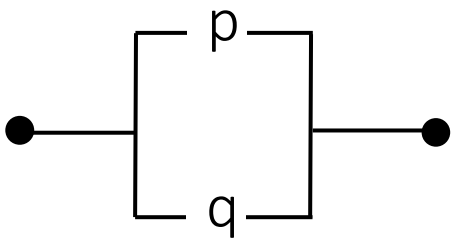



Representación:

$$p \wedge q$$

### CIRCUITO EN PARALELO

Es aquel que está constituido por interruptores dispuestos uno al lado del otro.




Representación:

$$p \vee q$$

# LEYES LÓGICAS: CIRCUITOS LÓGICOS

## EJERCICIO MODELO

Para comunicaciones secretas en una operación militar se utiliza el siguiente código:

$$((\sim p \rightarrow q) \wedge q) \wedge ((p \rightarrow q))$$

Al simplificar la operación se obtiene

A) p
B) q
C) $p \wedge q$
D) $\sim p$
E) V

## SOLUCIÓN:

Simplificando la expresión:

$$((\sim p \rightarrow q) \wedge q) \wedge ((p \rightarrow q))$$

*Propiedad condicional*
$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$$(p \vee q) \wedge q \qquad (\sim p \vee q)$$

*Propiedad condicional*
$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

*Propiedad absorción*
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$$q \wedge (\sim p \vee q)$$

*Propiedad conmutativa*
$p \vee q \equiv q \vee p$

$$q \wedge (q \vee \sim p)$$

*Propiedad absorción*
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$$q$$

∴ *Luego de simplificar resulta:* **q**

# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

## EJEMPLO 1

Simplificar el siguiente esquema:

Condicional

$$(p \rightarrow \sim q) \wedge [(q \rightarrow \sim p) \vee (q \rightarrow \sim r)]$$

$$(p \rightarrow \sim q) \wedge [(p \rightarrow \sim q) \vee (q \rightarrow \sim r)]$$

absorción

$$(p \rightarrow \sim q) \quad \checkmark$$

**Ley de la Condicional**

- $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

**Leyes de absorción**

- $[p \vee (p \wedge q)] \equiv p$
- $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$
- $[p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$
- $[p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$

## EJEMPLO 2

Reducir el siguiente esquema:

Condicional Condicional

$$(p \rightarrow \sim q) \wedge \sim (\sim q \rightarrow p)$$

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge \sim (q \vee p)$$

Morgan

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge \sim q \wedge \sim p$$

absorción

$$\sim q \wedge \sim p \quad \checkmark$$

**Leyes de Morgan**

- $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
- $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

## PROBLEMA 1

Simplificar la expresión

$$[p \rightarrow \sim(q \rightarrow p)] \rightarrow \sim q$$

A) $p \vee \sim q$
B) $p \wedge q$
C) $\sim p \vee q$
D) $\sim p \wedge \sim q$
E) $p$

## SOLUCIÓN:

~ Condicional

$$[p \rightarrow \sim(q \rightarrow p)] \rightarrow \sim q$$

$$[p \rightarrow (q \wedge \sim p)] \rightarrow \sim q$$

Condicional

$$[\sim p \vee (q \wedge \sim p)] \rightarrow \sim q$$

Absorción

$$\sim p \rightarrow \sim q$$

$$p \vee \sim q \quad \checkmark$$

**Ley de la Condicional**

- $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

**Negación de la Condicional**

- $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

**Leyes de absorción**

- $[p \vee (p \wedge q)] \equiv p$ ✓
- $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$
- $[p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$
- $[p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$

# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

## PROBLEMA 2

Al simplificar la proposición

$$[\sim p \rightarrow (q \wedge \sim p)] \rightarrow (\sim r \vee \sim p)$$

Se obtiene:

A) $\sim (p \wedge r)$

B) $p \wedge \sim r$

C) $\sim p \wedge q$

D) $q \vee \sim r$

E) $q \vee r$

## SOLUCIÓN:

Condicional

$$[\sim p \rightarrow (q \wedge \sim p)] \rightarrow (\sim r \vee \sim p)$$

$$[p \vee (q \wedge \sim p)] \rightarrow (\sim r \vee \sim p)$$

Absorción

$$[p \vee q] \rightarrow (\sim r \vee \sim p)$$

Condicional

$$\sim [p \vee q] \vee (\sim r \vee \sim p)$$

Morgan

$$[\sim p \wedge \sim q] \vee (\sim r \vee \sim p)$$

$$\sim r \vee \sim p \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

Absorción

$$\sim r \vee \sim p \equiv \sim (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) \equiv \sim (\mathbf{p} \wedge \mathbf{r}) \checkmark$$

**Ley de la Condicional**

- $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

**Leyes de absorción**

- $[p \vee (p \wedge q)] \equiv p$
- $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$
- $[p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$
- $[p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$

**Leyes de Morgan**

- $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
- $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

## PROBLEMA 3

Reduzca la expresión:

$$[(p \rightarrow \sim q) \wedge (q \rightarrow \sim p)] \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$

Y elija la forma equivalente

A) $p \vee q$
B) $\sim (p \wedge q)$
C) $p \wedge q$
D) $\sim (p \vee q)$
E) $q$

## SOLUCIÓN:

Simplificando el esquema

$$[(p \rightarrow \sim q) \wedge (q \rightarrow \sim p)] \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$

$$[(p \rightarrow \sim q) \wedge (q \rightarrow \sim p)] \rightarrow (p \wedge q)$$

Morgan

Condicional

$$[(p \rightarrow \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim q)] \rightarrow (p \wedge q)$$

Idempotencia

$$(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$$

Condicional

$$\sim (p \rightarrow \sim q) \vee (p \wedge q)$$

~Condicional

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

Idempotencia

$$\mathbf{p \wedge q} \quad \checkmark$$

**Ley de la Condicional**

- $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

**Idempotencia**

- $(p \vee p) \equiv p$
- $(p \wedge p) \equiv p$

**Negación de la Condicional**

- $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

## PROBLEMA 4

Simplifique:

$[(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)] \wedge \sim(p \wedge q)$

A) $\sim q$
B) $\sim p$
C) $q$
D) $p$
E) $(p \wedge q)$

## SOLUCIÓN:

Realizando la tabla de verdad

| p | q | [(~q | → | ~p) | → | (~p | → | ~q)] | ∧ | ~ | (p | ∧ | q) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | F | **V** | F | V | F | F | **F** | V | V | V |
| V | F | V | F | F | **V** | F | V | V | V | **V** | V | F | F |
| F | V | F | V | V | **F** | V | F | F | F | **V** | F | F | V |
| F | F | V | V | V | **V** | V | V | V | V | **V** | F | F | F |

Matriz principal

$\sim q$

Equivalente

# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

## PROBLEMA 5

Si $p \boxplus q \equiv (p \wedge q) \rightarrow q$

$p \triangle q \equiv p \rightarrow (p \vee q)$

Simplifique:

$$[(r \boxplus s) \rightarrow t] \leftrightarrow [\sim(t \triangle s)]$$

A) $t$
B) $\sim r$
C) $\sim t$
D) $r \leftrightarrow \sim s$
E) $r \leftrightarrow \sim t$

## SOLUCIÓN: De los operadores

$p \boxplus q \equiv (p \wedge q) \rightarrow q$

Condicional

$\sim(p \wedge q) \vee q$

Morgan

$(\sim p \vee \sim q) \vee q$

Asociativa

$\sim p \vee \underbrace{(\sim q \vee q)}_{V}$

$V$

$\boxed{p \boxplus q \equiv V \text{ (tautología)}}$

$p \triangle q \equiv p \rightarrow (p \vee q)$

Condicional

$\sim p \vee (p \vee q)$

Asociativa

$\underbrace{(\sim p \vee p)}_{V} \vee q)$

$V$

$\boxed{p \triangle q \equiv V \text{ (tautología)}}$

Nos piden:

$$[\underbrace{\underbrace{(r \boxplus s)}_{V}}_{t} \rightarrow t] \leftrightarrow [\sim\underbrace{\underbrace{(t \triangle s)}_{V}}_{F}]$$

$\equiv \sim t$

# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

## PROBLEMA 6

Sean

$p \square q \equiv \sim p \rightarrow \sim q$

$p \triangle q \equiv \sim p \wedge \sim q$

Simplifique: $[(p \square q) \rightarrow (p \triangle q)] \vee q$

A) $\sim p$

B) $\sim q$

C) $p$

D) $q$

E) $p \rightarrow q$

## SOLUCIÓN:

Reemplazando los equivalentes

$$[(p \square q) \rightarrow (p \triangle q)] \vee q$$

$$[(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)] \vee q$$

Condicional

Condicional

$$[(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)] \vee q$$

$$[\sim(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee q$$

Morgan

$$[(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee q$$

Absorción

$$q \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

Absorción

$$q \vee \sim p \equiv \sim p \vee q \equiv p \rightarrow q \checkmark$$

$p \square q \equiv \sim p \rightarrow \sim q$

$p \triangle q \equiv \sim p \wedge \sim q$

**Ley de la Condicional**

- $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

**Leyes de Morgan**

- $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
- $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

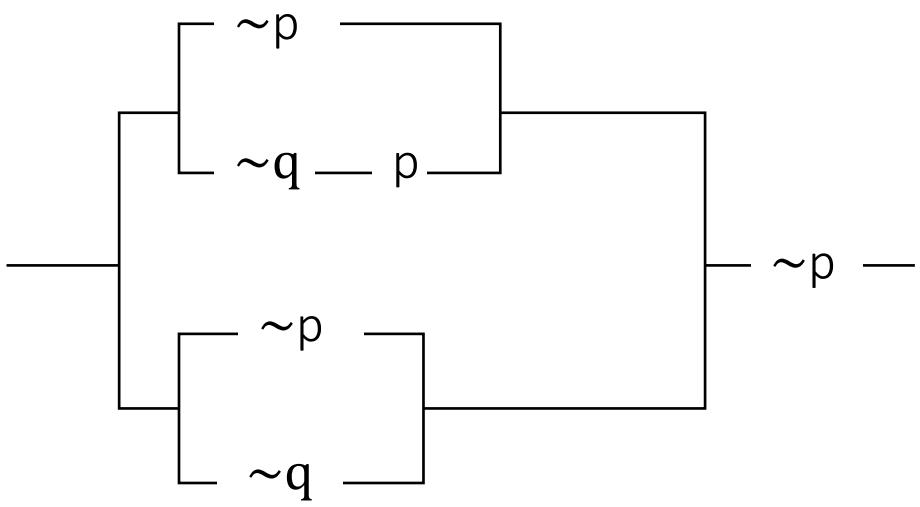
**Leyes de absorción**

- $[p \vee (p \wedge q)] \equiv p$
- $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$
- $[p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$
- $[p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$

# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

## PROBLEMA 7

Indique el enunciado lógico que represente al siguiente circuito.




Equivale a:

A) $p \wedge q$

B) $\sim p$

C) $p \Delta q$

D) $p \vee q$

E) $p \vee \sim q$

## SOLUCIÓN:

Transformando el circuito:

$$[\sim p \vee (\sim q \wedge p)] \vee (\sim p \vee \sim q) \wedge \sim p$$

Absorción

$$[\sim p \vee \sim q] \vee (\sim p \vee \sim q) \wedge \sim p$$

Idempotencia

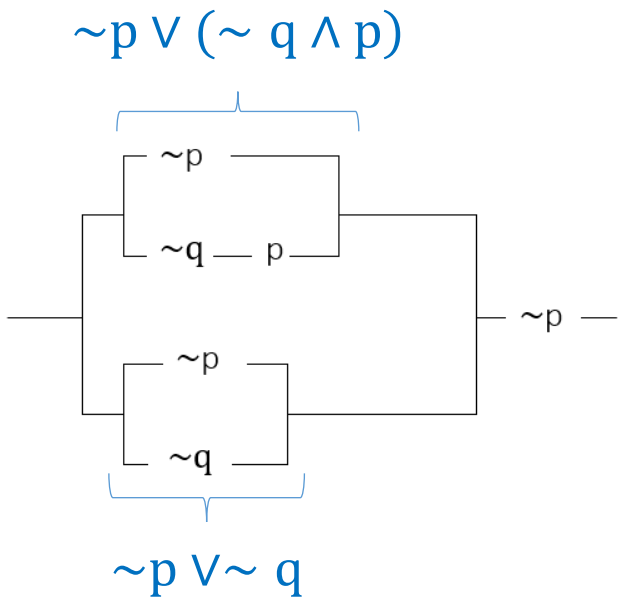
$$(\sim p \vee \sim q) \wedge \sim p$$

Conmutativa

$$\sim p \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

Absorción

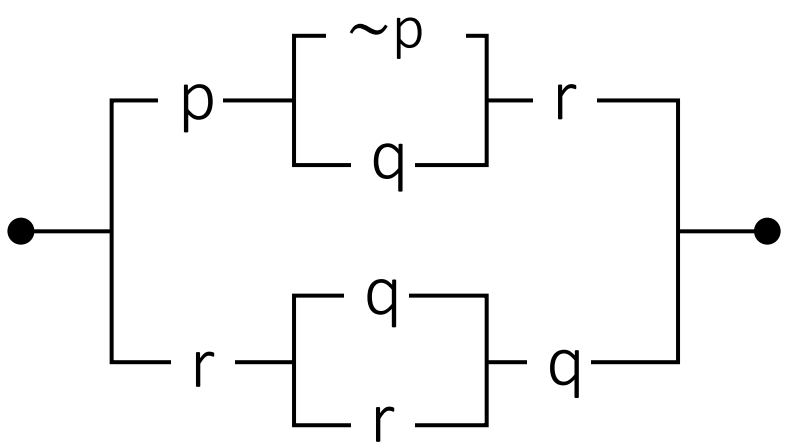
$$\equiv \sim p$$



# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

## PROBLEMA 8

Se tiene el siguiente esquema:

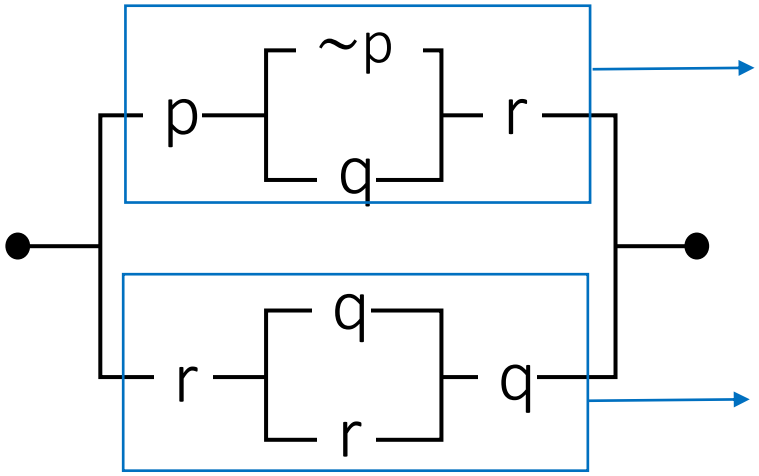



El costo de instalación de cada llave es de S/12. ¿En cuánto se reducirá el costo de la instalación si se reemplaza este circuito por su equivalente más simple?

A) S/48 B) S/60 C) S/72
D) S/36 E) S/24

## SOLUCIÓN:

Transformando el circuito:




$p \wedge (\sim p \vee q) \wedge r \equiv p \wedge q \wedge r$

Absorción

paralelo

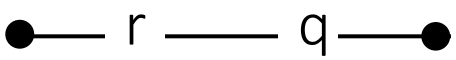
$r \wedge (q \vee r) \wedge q \equiv r \wedge q$

Absorción

$(p \wedge q \wedge r) \vee (r \wedge q)$

Absorción

$\equiv r \wedge q$



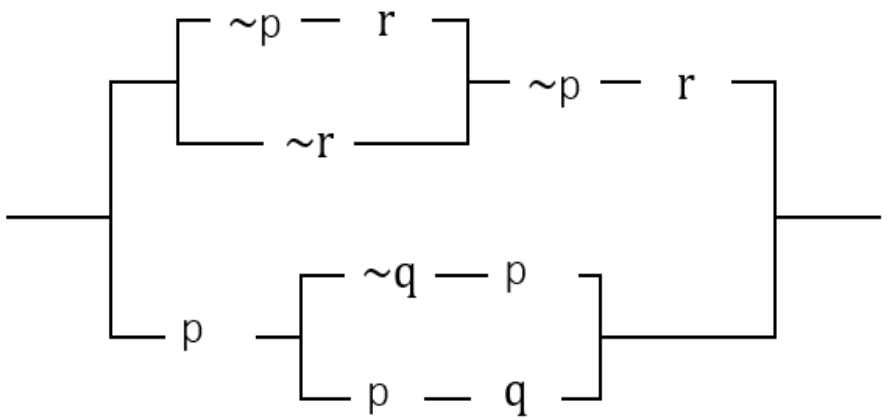

Llaves al inicio = 8
Llaves al final = 2

Se ahorra 6 llaves = 6( S/.12) = S/.72

# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

## PROBLEMA 9

Sabiendo que la instalación de cada llave cuesta S/. 20. Cuánto se ahorraría si hacemos una instalación mínima; pero equivalente a:




A) 80 B) 100 C) 140 D) 160 E) 180

## SOLUCIÓN:

### RAMA SUPERIOR

$$[(\sim p \wedge r) \vee \sim r] \wedge \sim p \wedge r$$

Absorción

$$[\sim p \vee \sim r] \wedge \sim p \wedge r$$

Absorción

$$\equiv \sim p \wedge r$$

### RAMA INFERIOR

$$p \wedge [(\sim q \wedge p) \vee (p \wedge q)]$$ Distributiva

$$[p \wedge (\sim q \wedge p)] \vee [p \wedge (p \wedge q)]$$

Idempotencia Idempotencia

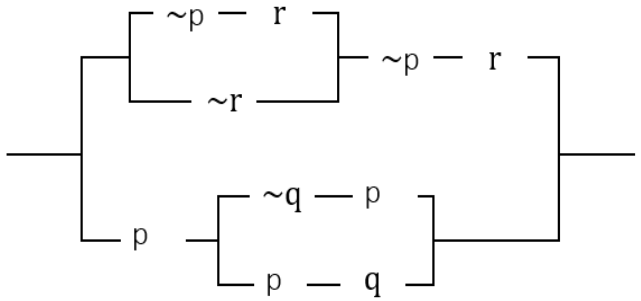
$$(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$$ Distributiva

$$[(p \wedge \sim q) \vee p] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee p]$$

Absorción Absorción

$$p \wedge p$$

$$\equiv p$$




### RAMAS EN PARALELO

$$(\sim p \wedge r) \vee p$$

Absorción

$$p \vee r$$

Llaves al inicio = 10
Llaves al final = 2

Se ahorra 8 llaves = 8( S/.20) = S/.160

# LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

## PROBLEMA 10

Antonia le dice a Martha: "Si cocinas o lavas toda la ropa, entonces no es cierto que; no vas a cocinar pero lavas toda la ropa". Sería lo mismo que le dijera:

I) No cocinas y lavas toda la ropa
II) Cocinas y lavas toda la ropa
III) Cocinas o no lavas toda la ropa
IV) Cocinas y no lavas toda la ropa
V) Si lavas toda la ropa entonces no cocinas

A) I o II
B) I o IV
C) Solo IV
D) Solo III
E) todas

## SOLUCIÓN:

p : cocinas
q : lavas toda la ropa

PASO 1 : Simbolizamos el enunciado

Morgan

$$(p \vee q) \rightarrow \sim(\sim p \wedge q)$$

$$(p \vee q) \rightarrow (p \vee \sim q)$$

Condicional

$$\sim(p \vee q) \vee (p \vee \sim q)$$

Morgan

$$(\sim p \wedge \sim q) \vee \underline{p \vee \sim q}$$

Conmutativa

$$\underline{(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q} \vee p$$

Absorción

$$\sim q \vee p$$

$$\boxed{\equiv \quad p \vee \sim q}$$

$\equiv$ Cocinas o no las toda la ropa

# CLAVES – CAPITULO 19

| Ejercicios en clase | | Ejercicios para el alumno | |
|---|---|---|---|
| 1 A | 6 E | 1 A | 6 A |
| 2 A | 7 B | 2 B | 7 A |
| 3 C | 8 C | 3 A | 8 C |
| 4 A | 9 D | 4 C | 9 E |
| 5 C | 10 D | 5 D | 10 D |